Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 2 Article 77

5-10-2019

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE ELLIPTIC EQUATION

Asrorjon Shokirov

Lecturer at the Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE ELLIPTIC EQUATION

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Шокиров Асроржон Муроджонович, преподаватель Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий

Аннотация: *В работе доказана существование и единственность решения одной краевой задачи для вырождающегося уравнения эллиптического типа.*

Ключевые слова: *вырождающегося уравнения, эллиптический тип, конормальная производная, принцип максимума, принцип Зарембa–Жиро.*

БУЗИЛАДИГАН БИР ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Шокиров Асроржон Муроджонович, Тошкент ахборот технологиялари университети Фарғона филиали ўқитувчиси

Аннотация: *мақолада бузиладиган эллиптик типдаги тенглама учун бир чегаравий масаланинг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган.*

Калит сўзлар: *бузиладиган тенглама, эллиптик тип, конормал ҳосила, максимум принципи, Зарембa-Жиро принципи.*

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE ELLIPTIC EQUATION

Shokirov Asrorjon Murodjonovich, Lecturer at the Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies

Abstract: *The existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation is proved.*

Keywords: *degenerate equation, elliptic type, conormal derivative, maximum principle, Zaremba – Giraud principle.*

В области Ω лежащей в полуплоскости y>0, ограниченной отрезком [–1,1] оси *x* и кривой *L* с концами в точках A(–1,0), B(1,0), рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 y^m u = 0, \qquad (1)$$

где $m, \lambda \in R,\ m > 0$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω.

Задача K. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{\Omega}$, имеющее непрерывные производные u_x и u_y в $\Omega \cup L$, причем в точках A и B эти производные могут обращается в бесконечность порядка ниже $2/(m+2)$, и удовлетворяющее краевым условиям

$$[\alpha(s) A_s[u] + \beta(s) u]|_L = \varphi(s), \quad 0 < s < l,$$

$$u|_{y=0}=\tau(x),\ \ x\in[-1,1],$$

где s–длина дуги кривой L, отсчитываемый от точки В, $\alpha(s),\beta(s),\varphi(s)$ и $\tau(x)$– заданные непрерывные функции, $\alpha(s)\neq 0$, l–длина кривой L, $A_s[u]\equiv y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}$ – конормальная производная, $\frac{dy}{ds}=\cos(n,x)$, $\frac{dy}{ds}=-\cos(n,y)$, n–внешняя нормаль к кривой L.

Теорема 1. Если $\alpha(s)\neq 0$ и $\beta(s)/\alpha(s)\leq 0$, то задача К не может иметь боле одного решения.

Доказательство теоремы легко следует из принципов максимума и Заремба–Жиро.

Существования решения задача К докажем методом потенциалов. Для этого сперва построим теория потенциалов для уравнения (1).

Пусть $x=x(s)$, $y=y(s)$–параметрическое уравнение кривой L, где s–длина дуги, отсчитываемая от точки B.

Относительно кривой L будем предполагать, что:

1) функции $x(s)$, $y(s)$ на отрезке $[0,l]$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0,l]$, где l–длина кривой L;

2) в окрестности точек A и B на кривой L выполняется условие

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|\leq Cy^{m+1}(s),$$

где C–постоянная. Координаты переменной точки на кривой L будем обозначать через (ξ,η).

Рассмотрим интегралы

$$W(x,y)=\int_0^l \mu(t)A_t[g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)]dt, \tag{2}$$

$$V(x,y)=\int_0^l \rho(t)g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)dt, \tag{3}$$

где

$$g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\left(r_1^2\right)^{-\beta}\sigma_1^{1-2\beta}H_3(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\sigma_1,\sigma_2)–$$

фундаментальное решение уравнения (1).

Здесь

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},\ \beta=\frac{m}{2m+4},$$

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}} \mp y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma_1 = 1-\sigma,\ \sigma = \frac{r^2}{r_1^2},\ \sigma_2 = -\lambda^2 r_1^2/4,$$

$H_3(a,b,c;x,y)$–гипергеометрическая функция Горна [1].

Интеграл (2) будем называть потенциалом двойного слоя с плотностью $\mu(t)$, а интеграл (3)- потенциал простого слоя с плотностью $\rho(t)$.

Очевидно, что потенциал двойного слоя $W(x,y)$ и простого слоя $V(x,y)$ являются регулярными решениями уравнения (1) в любой области, лежащей в верхней полуплоскости, не имеющих общих точек ни с кривой L, ни с осью x.

Как и в случае логарифмического потенциала, можно доказать следующие свойства потенциалов.

Лемма 1. Справедливы соотношения

$$W_1(x,y) = \int_0^l A_t[g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)]dt = \begin{cases} p(x,y,\lambda)-1,\ \textit{при}\ (x,y)\in\Omega, \\ p(x,y,\lambda)-\frac{1}{2},\textit{при}\ (x,y)\in L, \\ p(x,y,\lambda),\ \textit{при}\ (x,y)\notin\Omega, \end{cases}$$

где $p(x,y,\lambda) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial g_2(\xi,0;x,y;\lambda)}{\partial\eta} d\xi$.

Лемма 2. Если кривая L удовлетворяет условиям 1) и 2) , то существует такая постоянная B, что

$$\int_0^l |A_t[g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)]| \le B$$

при любом положении точки (x,y) в верхней полуплоскости.

Лемма 3. Если точка (x,y) лежит на L, то

$$|A_t[g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)]| \le B_0 \frac{\eta^{m/2}}{\left(r_1^2\right)^\beta}\left(\ln\frac{1}{\sigma}+1\right)$$

Доказательство этих лемм проводится так же, как в работе [2].

Потенциал двойного слоя $W(x,y)$ имеет предел при стремлении точки (x,y) к точке $(x(s),y(s))\in L$ извне или изнутри. Предел значений $W(x,y)$ изнутри обозначим через $W^+(x,y)$, а предел извне – через $W^-(x,y)$. В случае произвольной непрерывной плотности $\mu(t)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если кривая L удовлетворяет условиям 1) и 2) , а плотность $\mu(t)$ –непрерывная функция, то справедливы формулы

$$W^{+}(x,y)=-\frac{1}{2}\mu(s)+\int_{0}^{l}\mu(t)K(s,t)dt,$$

$$W^{-}(x,y)=\frac{1}{2}\mu(s)+\int_{0}^{l}\mu(t)K(s,t)dt,$$

где $K(s,t)=A_t[g_2(\xi,\eta\,;x,y;\lambda)]$.

Доказательство теоремы следует из лемм 1 и 2.

Возьмем на кривой L произвольную точку $N(x(s),y(s))$ и проведем в этой точке нормаль. Рассмотрим на этой нормали какую–нибудь точку $M(x,y)$, не лежащую на кривой L, и составим конормальную производную от потенциала простого слоя (3):

$$A_s[V(x,y)]=\int_{0}^{l}\rho(t)A_s[g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)]dt, \qquad (4)$$

где $A_s[\ ]\equiv y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{dy}{ds}=\cos(n,x)$, $\frac{dx}{ds}=-\cos(n,y)$-направляющие косинусы внешней нормали n к кривой L в точке $N(x(s),y(s))$.

Интеграл (4) существует и в том случае, когда точка $M(x,y)$ совпадает с точкой $N(x(s),y(s))\in L$.

Обозначим через $A_s^{+}[V(x,y)]$ и $A_s^{-}[V(x,y)]$ соответственно предельные значения конормальной производной при стремлении точки M(x,y) к точке $N(x(s),y(s))\in L$ изнутри и извне кривой L.

Теорема 3. Если кривая L удовлетворяет условиям 1) и 2) , а плотность $\rho(t)-$непрерывная функция, то справедливы формулы

$$A_s^{+}[V(x,y)]=\frac{1}{2}\rho(s)+\int_{0}^{l}\rho(t)K(t,s)dt,$$

$$A_s^{-}[V(x,y)]=-\frac{1}{2}\rho(s)+\int_{0}^{l}\rho(t)K(t,s)dt,$$

где $K(t,s)=A_s[g_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s);\lambda)]$.

Это теорема доказывается, как и в теории логарифмического потенциала.

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи K.

Существование решение поставленной задачи докажем методом функции Грина. Функцией Грина задачи K для уравнения (1) называется функция $G(\xi,\eta;x,y)$, которая:

1) является регулярным решением уравнения (1) всюду в области Ω, за исключением точки (x,y);

2) удовлетворяет граничным условиям

$$\left\{\alpha(s)A_s[G(\xi,\eta;x,y)]+\beta(s)G(\xi,\eta;x,y)\right\}|_L=0,\ (x,y)\in\Omega,$$

$$G(\xi,0;x,y)=0,\ -1\le\xi\le1;$$

3) может быть представлена в виде

$$G(\xi,\eta;x,y)=g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)+v(\xi,\eta;x,y),$$

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $v(x,y;x_0,y_0)$, которая в силу определения функции Грина должна удовлетворять граничным условиям

$$[\alpha(s)A_s[v]+\beta(s)v]|_L=-[\alpha(s)A_s[g_2]+\beta(s)g_2]|_L,\tag{5}$$

$$v(x,0;x_0,y_0)=0,\ (x_0,y_0)\in\Omega,\ -1<x<1.\tag{6}$$

Будем искать функцию $v(x,y;x_0,y_0)$ в виде потенциала простого слоя:

$$v(x,y;x_0,y_0)=\int_0^l\rho(t;x_0,y_0)g_2(\xi,\eta;x,y;\lambda)dt,\tag{7}$$

при этом условие (6) выполнено. Используя граничное условие (5) и принимая во внимание первую из формул теоремы 2, получим интегральное уравнения для плотности $\rho(s;x_0,y_0)$:

$$\rho(s;x_0,y_0)+2\int_0^l\rho(t;x_0,y_0)K_0(t,s)dt=f(s;x_0,y_0),\tag{8}$$

где
$$K_0(t,s)=A_s[g_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s);\lambda)]+$$
$$+\frac{2\beta(s)}{\alpha(s)}g_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s);\lambda),$$

$$f(s;x_0,y_0)=-2A_s[g_2(x(s),y(s);x_0,y_0;\lambda)]-\frac{2\beta(s)}{\alpha(s)}g_2(x(s),y(s);x_0,y_0;\lambda).$$

Правая часть уравнения (8) есть непрерывная функция от s (так как точка $(x_0,y_0)\in\Omega$, $(x(s),y(s))\in L$). В силу леммы 3 к уравнению (8) применима теория Фредгольма, при этом легко установить, что $\delta=-2$ не является собственным значения ядра $K_0(t,s)$. Тогда уравнения (8) имеет единственное непрерывное решение

$$\rho(s;x_0,y_0)=f(s;x_0,y_0)+2\int_0^l R(t,s,-2)f(t;x_0,y_0)dt,\tag{9}$$

где $R(t,s-2)$–резольвента ядра $K_0(t,s)$.

Подставляя (9) в (7), получим регулярную часть функции Грина $G(\xi,\eta;x,y)$ поставленной задачи K.

Теорема 4. Функция

$$u(x,y)=\int_{-1`}^{1}\tau(\xi)\frac{\partial G(\xi,0;x,y)}{\partial\eta}d\xi+\int_{0}^{l}\frac{\varphi(s)}{\alpha(s)}G(\xi,\eta;x,y)ds,$$

где $\tau(x)\in C[-1,1]$, а $\varphi(s),\alpha(s)\in C[0,l]$, $\alpha(s)\neq 0$, есть решение задачи K для уравнения (1) в области Ω.

Эта теорема доказывается с использованием формулы Грина и свойств функции Грина.

References

1. Beytman G., Erdeyi A. Vqsshie transtsendentnqe funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsiya Lejandra. M.: Nauka. 1965. 296 s.
2. Smirnov M. M. Vqrojdayuo'iesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya. M.: Nauka. 1966. 292 s.